

*Пантелеева О.Б.,  
к. э. н., доцент  
кафедры бухгалтерского учета и анализа  
Краснодарского филиала РЭУ им. Г. В. Плеханова  
Анодина К.В.,  
студентка  
Краснодарского филиала РЭУ им. Г.В. Плеханова  
Пантелеева М.А.,  
бухгалтер ООО Фирма «ФАИТ-Кубань»*

## **ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ МОНОПОЛИИ**

### **ECONOMIC-MATHEMATICAL MODELING OF PRICING IN A MONOPOLY**

**Аннотация:** в статье изложен аналитический обзор положения монополии среди различных рыночных структур. Методы оптимизации прибыли при ней, которые являются актуальными в рыночной экономике. Приведены экономико-математические методы моделирования оптимального выпуска и цены на рынке.

**Abstract:** the article presents an analytical review of the monopoly position among various market structures. Methods of profit optimization with it, which are relevant in the market economy. Ways of calculation of optimum release and the optimum price in the market are resulted.

**Ключевые слова:** монополия, несовершенная конкуренция, власть, ценообразование, оптимальный объем выпуска, цена, предельный доход, предельные издержки, множитель Лагранжа, оптимизация.

**Keywords:** monopoly, imperfect competition, power, pricing, optimal output, price, marginal revenue, marginal cost, Lagrange multiplier, optimization.

Цена и ценообразование — важнейшие понятия рыночной экономики. Если говорить в общем, ценой, называем денежную сумму, которую покупатель готов отдать на рынке в обмен на реализуемый продавцом товар. Поэтому цена — основная характеристика товара с точки зрения рыночной экономики. В рыночной экономике процесс выбора окончательной цены производится в зависимости от себестоимости продукции, цен конкурентов, соотношения спроса и предложения и других факторов.

Каждое предприятие стремится максимизировать прибыль, это его главная цель, получать максимальный доход с минимальными затратами. Область максимизации

прибыли подвергалась исследованию со стороны разных предметов, исключением не стало и математическое моделирование [3, 4].

Рассмотрим такую часть экономической стратегии, как захват рынками несовершенной конкуренции в области ценообразования, которая используются фирмами-монополистами. Безусловно эти вопросы имеют практическую значимость, так как монопольные отрасли, это не редкость, особенно в промышленности.

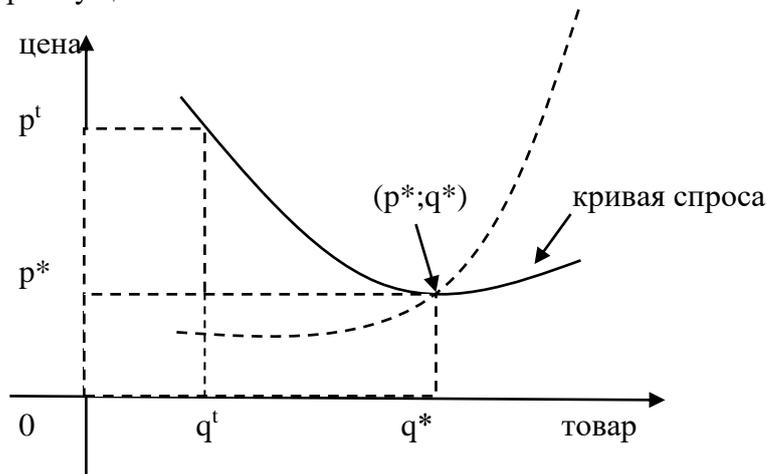
Целью нашего исследования является ознакомление с математической моделью монополии, одной из основных разновидностей несовершенной конкуренции.

Перед нами стоят задачи: сформировать модель, которая будет определять оптимальный объем выпуска товара, и методику, по которой можно будет вычислять оптимальные цены на таких рынках.

Несовершенная конкуренция представляет собой рынок, в котором отсутствует хотя бы одно из условий конкуренции: множество покупателей и продавцов, однородность (стандартность) продаваемой продукции, высокая мобильность факторов производства, отсутствие барьеров на пути вступления на рынок или выхода из него, равным доступом всех участников рыночных отношений к информации и другие условия [5]. Наиболее первостепенные из условий, первые два, которые предопределяют, что, ни покупатели, ни продавцы не имеют возможность влиять на рыночные цены продукции. В условиях несовершенной конкуренции производители или потребители в какой-то степени могут влиять на цену, в зависимости от положения: монополия/монопсония, олигополия/олигопсония. Монополия - крупное предприятие, контролирующее производство и сбыт одного или нескольких видов продукции - это структура, при которой на рынке отсутствует конкуренция и функционирует одна фирма. Монопсония - ситуация на рынке, когда имеется только один покупатель и множество продавцов [2]. Олигополия - тип рыночной структуры несовершенной конкуренции, в которой доминирует крайне малое количество фирм. Олигопсония - ситуация на рынке, для которой характерно ограниченное число потребителей и большое число продавцов (производителей). В данном исследовании мы рассмотрим и проанализируем ценообразование в монополии.

Монополист - это единственный производитель уникального товара, которому нет заменителей. Соответственно он сам может определять объем и цену продаваемых им товаров (рисунок 1).

Для того, чтобы лучше понять сущность и различие совершенного конкурента и монополиста, сравним их доход при одном и том же уровне спроса. Допустим, что при совершенной конкуренции равновесие фирмы будет в точке  $(q^*; p^*)$ , а доход  $\alpha \times p^* \times q^*$  ( $\alpha < 1$ ). Тогда, когда при монополии, фирма может получить точно такой же доход, если уменьшит объем производства и при этом повысит цену на свою продукцию. В этом есть преимущество монополистов.



**Рис. 1.** Выбор монополистом объема и цены продаваемых товаров.

Чтобы получить максимальную прибыль с учетом затрат на производство товара, монополист задается вопросом: насколько увеличивать цену и уменьшать объем продукции?

Основными ориентирами монополиста при принятии экономических решений являются кривая спроса и оценка затрат на производство. Он устанавливает объем производимого товара, а уровень цены определяет кривая спроса. Поэтому  $p = p(q)$ , где  $p$  — цена,  $q$  — количество выпуска продукции, и если фирма имеет информацию о величине спроса, то сможет добиться максимальной прибыли.

Чтобы увеличить прибыль, монополист может: увеличить цену товара, оставив объем производства прежним, либо оставить цену прежней, а объем производства уменьшить (снизив тем самым затраты производства).

Чтобы найти оптимальное решение, обратимся к конкурентному рынку и исследуем долгосрочную задачу.

Долгосрочная задача охватывает период, достаточный для принятия и реализации крупномасштабных решений: наращивания или сокращения основных фондов, изменения структуры производства, определения долгосрочных инвестиций, страховок и другие. Эти затраты непосредственно не зависят от объема текущего

выпуска. Поэтому математические модели долгосрочной задачи фирмы являются задачами безусловной оптимизации.

На долгосрочный период фирма может планировать любые затраты, поэтому модель задачи имеет вид:

$$P(x_1, \dots, x_m) = p \times f(x_1, \dots, x_m) - \sum_{k=1}^m w_k x_k \rightarrow \max,$$

$$x_k \geq 0, k = 1, \dots, m.$$

Это есть задача безусловной максимизации прибыли. Здесь постоянные затраты  $C_0$  не учтены, так как они не влияют на максимизацию функции цены  $P$  по переменным затратам  $x_1, \dots, x_m$ . В векторной форме долгосрочная задача имеет вид:

$$P(x) = p \times f(x) - (w, x) \rightarrow \max, \quad x \geq 0$$

Где  $w=(w_1, \dots, w_m)$ -вектор цен затрат [1].

Нам нужно узнать оптимальный объем производства, поэтому мы перепишем эту задачу на язык выпуска. Пометим доход, как функцию от выпускаемой продукции

$$pf(x) = pq = R(q)$$

Затраты фирмы зависят от объема производства, поэтому они тоже являются функциями от количества выпускаемой продукции:  $(w, x)=C(f(x))=C(q)$

$$P(q) = R(q) - C(q) \rightarrow \max \tag{1}$$

Условие первого порядка для максимизации прибыли  $P(q)$  есть

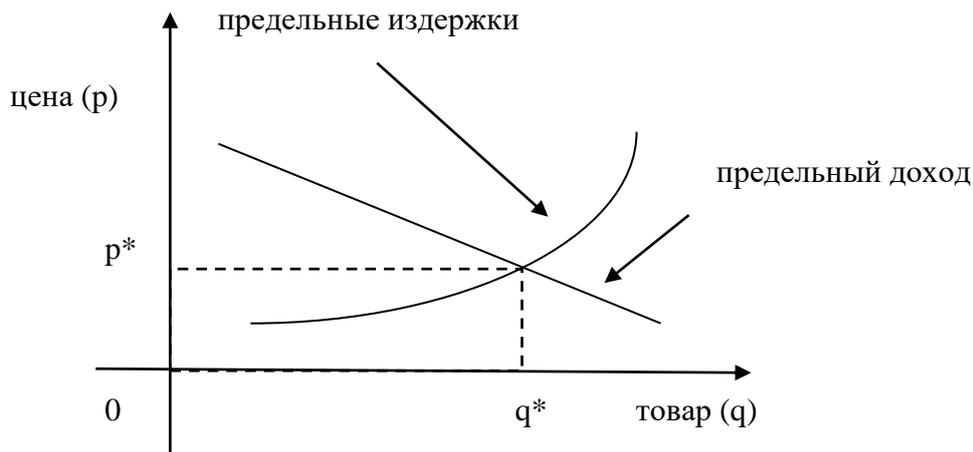
$$dp/dq = 0 \text{ или } \frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq}$$

Из этого мы видим, что, для того чтобы максимизировать прибыль, фирма должна найти такой объем выпуска продукции при котором предельный доход будет равен предельным издержкам.

Учитывая, что  $dR/dq = p^*$ , получим  $p^* = dC/dq$ , это значит, что если равновесная цена существует, то она должна быть равна предельным затратам:

$$\frac{dR}{dq} = p^* = \frac{dC}{dq} \tag{2}$$

Это равенство показано на графике (рисунок 2)



**Рис. 2.** Графическая иллюстрация равновесной цены.

Теперь проверим, подчиняется ли цена, которая максимизирует прибыль монополиста, закону (2)?

В монополии  $p = p(q)$ , поэтому:

$$R(q) = p(q) \times q \quad (3)$$

Далее будем считать, что  $q > 0$

Вычислим предельный доход:

$$\frac{dR(q)}{dq} = \frac{dp}{dq} \times q + p \quad (4)$$

Мы можем видеть, что в монополии цена убывает с ростом объема продаваемых товаров, это обусловлено тем, что фирме приходится снижать цену, для продажи большего количества продукции. Следовательно  $dp/dq < 0$  и из (4) следует:

$$\frac{dR(q)}{dq} < p$$

Итак, мы видим, что в монополии предельный доход меньше цены товара.

Следующим нашим анализом подвергнем издержки монополиста. Цены затрат являются функциями от объема затрат, как и на конкурентном рынке, т.е.  $w_j = w_j(x_j)$ .

Следовательно, издержки на факторы производства выражаются как

$$C_j(x_j) = w_j(x_j) \times x_j \quad (5)$$

Предположим, что  $x_j > 0$  для всех  $j = 1, \dots, m$ .

Рассчитаем предельные издержки:

$$\frac{dC_j(x_j)}{dx_j} = \frac{dw_j}{dw_j} \times x_j + w_j \quad (6)$$

Согласно рыночным законам фирмы могут покупать больше данного производства, если предложат выше плату. Поэтому  $dw_j/dx_j > 0$ . Следовательно, из (6)

$$\frac{dC_j(x_j)}{dx_j} > w_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Из произведенных нами вычислений мы видим, что в монополии предельные издержки на факторы производства оказываются больше цен.

Получаем оптимизационную задачу монополиста:

$$P(x, q) = p(q) \times \sum_{j=1}^m w_j(x_j)x_j \rightarrow \max \quad (7)$$

При ограничениях  $q = f(x_1, \dots, x_m)$ . Максимум функции прибыли  $P$  в задаче (7) вычисляется по переменной  $m + 1$ . Потому составим функцию Лагранжа, где  $\gamma$  - множитель Лагранжа. Выпишем нужные условия оптимальности точки  $(x; q)$ :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dq} \times q + p - \gamma = 0, \\ -\frac{dw_j}{dx_j} \times x_j - w_j + \gamma \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ f(x_1, \dots, x_m) - q = 0. \end{cases}$$

Из этого получаем:

$$\gamma = p + \frac{dp}{dq} \times q, \quad (8)$$

$$\gamma \frac{\partial f}{\partial x_j} = w_j + \frac{dw_j}{dx_j} \times x_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (9)$$

Сумма в равенстве (8) - предельный доход, сумма в равенстве (9) - предельные издержки по производственному фактору  $j$ -вида, поэтому левая часть равенства (9) – произведение предельного дохода на предельный продукт  $j$ -го вида затрат, которое можно толковать, как предельный доход  $j$ -го вида затрат.

Если исключить из системы необходимых условий множитель Лагранжа  $\gamma$ , получим:

$$\begin{cases} \frac{dR(q)}{dq} \times \frac{df}{dx_j} = \frac{dC_j(x_j)}{dx_j}, \quad j = 1, \dots, m, \\ f(x_1, \dots, x_m) = q \end{cases} \quad (10)$$

Используя равенства (4) и (6), перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} \frac{dR(q)}{dq} \times \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{dC_j(x_j)}{dx_j}, & j = 1, \dots, m, \\ f(x_1, \dots, x_m) = q. \end{cases} \quad (11)$$

Далее, оценим отношение предельной стоимости затрат на предельный продукт

$$\frac{dC_j(x_j)}{dx_j} \div \frac{df}{dx_j}$$

Первое, из (10) мы знаем, что эта величина для всех  $j$  одинаковая.

Второе, издержки мы можем представить функцией от выпуска

$$C_j = C_j(q)$$

Так следуя равенству (11) формально можем написать

$$\frac{dC_j(x_j)}{dx_j} \div \frac{dC_j}{dq}, \quad j = 1, \dots, m$$

Поскольку данная величина одинакова для всех  $j$ , то вычеркивая индекс из системы (10) и (11) получим:

$$\frac{dR(q)}{dq} = \frac{dC(q)}{dq} \quad (12)$$

Таким образом, монополист может максимизировать прибыль, путем достижения такого уровня выпускаемой продукции, при котором предельный доход равен предельным издержкам.

Для монополиста у нас получилось схожее правило оптимального поведения, как и для любой фирмы в условиях конкурентного рынка. Однако, в случае же с монополией:

$$\frac{dR}{dq} = p + \frac{dp}{dq} \times q$$

Из-за этого оптимальная цена продукта имеет отличия от выражения (2) повышением. А собственно, через доход она выражена, как

$$p^* = \frac{dR}{dq} - \frac{dp}{dq} \times q$$

а если через предельные издержки, то:

$$p^* = \frac{dC_j(x_j)}{dx_j} \div \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{dp}{dq} \times q, j = 1, \dots, m$$

Таким образом можно сделать вывод, что монополия принимает крайнее расположение посреди рынков несовершенной конкуренции. Фирма-монополист имеет

полную рыночную власть над ценообразованием. Наилучший объем выпуска продукции и надлежащая цена товара, устанавливаются исходя из равенства предельного дохода и предельных издержек монополиста. Аналитически эти величины можем вычислить методом множителей Лагранжа, который применен к оптимизационной модели монополиста.

### **Список литературы**

1. Гефан Г.Д., Таирова Е.В. Экономико-математические модели. — Иркутск: ИрГУПС, 2012. — 91 с.
2. Журавлева Г.П. Экономическая теория (политэкономика). — Издание 5-е. — М.:ИНФРА-М, 2013. — 864 с.
3. Пантелеева О.Б. Прогнозирование экономических процессов //В сборнике: Семнадцатые Кайгородовские чтения. Культура, наука, образование в информационном пространстве региона Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Главный редактор С.С. Зенгин. - 2017. - С. 195-197.
4. Пантелеева О.Б. Критерии согласия в экономических исследованиях //В сборнике: АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ. - Краснодар, 2017. - С. 27
5. Чепурина М.Н., Киселева Е.А. Курс экономической теории. — Издание 7-е. — Киров: АСА, 2011. — 880 с.