УДК 330. 4

Пантелеева О.Б.,
к. э. н., доцент
кафедры бухгалтерского учета и анализа
Краснодарского филиала РЭУ им. Г. В. Плеханова
Кривко А.С.,
студентка
Краснодарского филиала РЭУ им. Г.В. Плеханова
Пантелеева М.А.,
бухгалтер ООО Фирма «ФАИТ-Кубань»

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

MODEL OF OPTIMAL ECONOMIC GROWTH

Аннотация: в статье рассматриваются проблемы состояния экономики под воздействием управляемых и неуправляемых факторов. Рассмотрены экономико-математические модели, наиболее адаптированные для оптимизации экономического роста и стабильного развития общества.

Abstract: The article deals with the problems of the state of econlamics under the influence of controlled and uncontrollable factors. The article considers economic and mathematical models, which are most adapted for optimization of economic growth and stable development of society.

Ключевые слова: модель роста, траектория, потребление, кривая, экономическое управление, фонд.

Keywords: growth model, trajectory, consumption, curve, economic management, fund.

В данной статье мы рассмотрим, с точки зрения аспекта потребления, траекторию экономического роста.

Фактически, экономическая траектория - это кривая изменения (фазового) состояния экономики во времени под воздействием всевозможных неуправляемых и управляемых факторов. В случае если во внимание не принимать существование непредсказуемых факторов, в этом случае допустимо отметить, что рычаги управления экономикой относятся к ее участникам, а именно одни - производителям, другие - государству, следующие - потребителям. Любой из участников распоряжается собственными рычагами, отталкиваясь от своей заинтересованности. Под влиянием управляющих параметров вектор состояния экономики приходит в движение, можно сказать представляет некоторую кривую в фазовом пространстве. Любому «положению» данных рычагов присущая собственная траектория. Цель экономического управления заключается в том, чтобы была реализована наиболее эффективная (оптимальная) траектория.

Установлено довольно большое количество желательных условий, которые можно предъявить к экономической траектории:

- конкурентная равновесность,
- соответствие максимальному сбалансированному темпу роста (то есть магистральность),
- оптимальность в значении максимизации или же минимизации какой-либо целевой функции.

Актуальность изучения моделей роста идет параллельно с развитием концепции стабильного развития человеческого общества. Сущность стабильного развития можно объяснить, как стремление общества к удовлетворению потребностей в реальное время проживающих людей без лишения возможности будущих поколений удовлетворять свои потребности [4]. Учет данной концепции при разработке долговременного экономического плана развития подразумевает разрешение проблемы, связанной с распределением благ на настоящее и перспективное потребление [3]. Обеспечение перспективного потребления принято называть инвестициями или капитальными вложениями.

С точки зрения настоящего момента наиболее высокий уровень потребления предпочтительнее более низкого. Однако высокий уровень потребления требует меньшие капитальные вложения (на будущее потребление). По этой причине рядом с траекторией экономического роста появляется задача выбора оптимальной политики потребления. Таким образом, мы подходим к задаче об оптимальном, с точки зрения потребления, экономическом росте. Ее мы станем формализовать как динамическую оптимизационную модель и анализировать с помощью понятий математической теории оптимального управления.

По своей сути, задача об оптимальных пропорциях потребления и инвестиций относится к макроэкономике, к агрегированным моделям. Исходя из этого мы ее смоделируем для экономики, производящей один продукт с применением двух главных факторов производства – капитала и труда. На таком макроуровне все, без исключения, величины представляются в их стоимостном измерении. Исходя из этого, валовый продукт ассоциируется с национальным доходом, а инвестиции и потребление составляют национальные расходы (рис. 1).

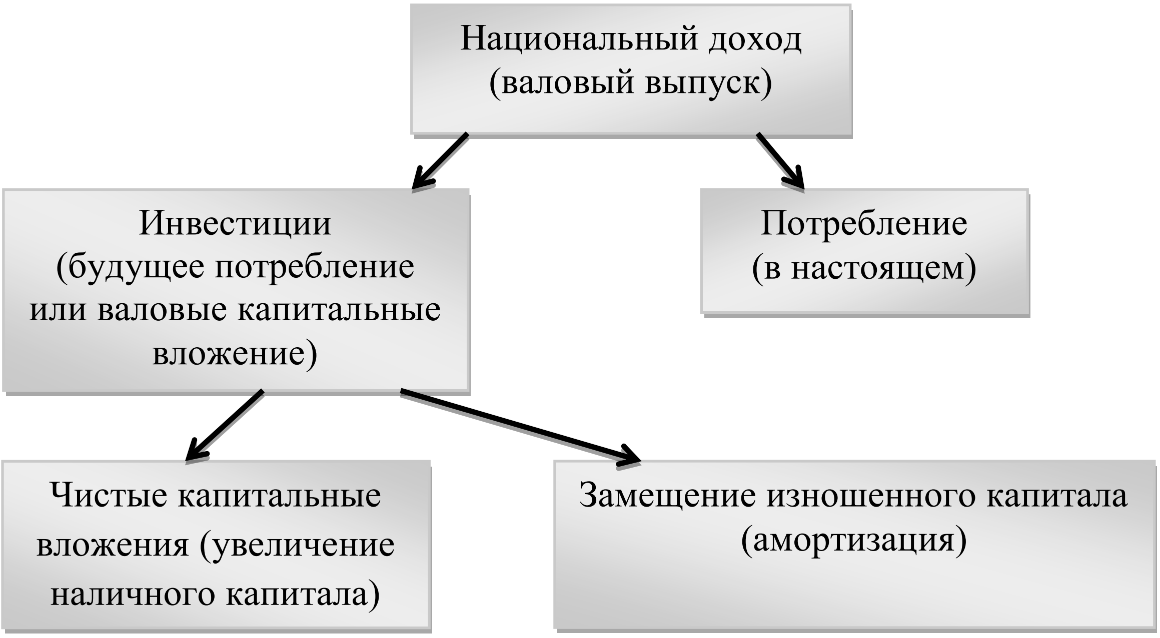

Рис. 1. Схема распределения национального дохода.

Установим требуемые обозначения. Для агрегированных моделей Yt будет означать валовый выпуск в год t , K^t - капитал, L^t - трудовые ресурсы, C^t - объем потребления (основные фонды), I^t - инвестиции (валовые капитальные вложения). С целью упрощения модели будем подразумевать, то что в рассматриваемом (предполагаемом) периоде времени [0, T] экспорта и импорта нет, так же и технический прогресс отсутствует. Обобщение модели с учетом этих значимых условий функционирования экономики не составляет труда, однако загромождает модель. Допустим валовый выпуск определяется с помощью агрегированной производственной функции F:

$$Y^t=F(K^t,L^t) \tag{1}$$

Отсутствие технического прогресса означает, то что производственная функция F инвариантна во времени. Бюджетный баланс требует, чтобы в каждый год t выполнялось равенство:

$$Y^t=C^t+I^t \tag{2}$$

Равенство (2) показывает соотношение расходов общества с его доходами и указывает, что каждый год на макроуровне весь национальный доход делится на потребление и инвестиции, а именно между настоящим и перспективным потреблением. Обозначим через α^t долю инвестиций в национальном доходе в год t. Тогда,

$$I^t=\alpha^t Y^t,\ \ C^t=(1-\alpha^t)Y^t$$

Как следует из рисунка 1, валовые капитальные вложения, в свою очередность, идут на повышение наличного капитала с целью приращения основных фондов (чистые капитальные вложения) и на замещение изношенного капитала, вернее на возобновление изношенной части основных производственных фондов (амортизационные отчисления).

Допустим, что главные фонды изнашиваются с темпом μ^t, в частности за год t из строя выходит $\mu^t K^t$ единиц основных фондов. В силу обозначений, K^t и K^{t+1} характеризуют состояние капитала в начале и в конце периода [t, t+1]. Таким образом, приращение капитала за год есть $\Delta K^t=K^{t+1}-K^t$. По этой причине, объем инвестиций должен удовлетворять условию:

$$I^t=\Delta K^t+\mu^t K^t \qquad (3)$$

Из этого приобретаем динамику чистого капитального вложения (уравнения движения основных фондов) [1]:

$$K^{t+1}=\alpha^t F(K^t,L^t)+(1-\mu^t)K^t\ ,\ t=0,1,\ \dots\ ,\ T-1,$$

где - T - горизонт планирования, а K^0 начальные вложения в основные фонды. Это есть аналог основного уравнения экономического роста в агрегированных показателях.

С целью построения нужной модели оптимального экономического роста в виде задачи оптимального управления нам нужно включить понятия фазового состояния экономики, управляющих параметров, создать уравнение движения, установить первоначальное состояние и критерий свойства (целевой функционал). Такую модель называют неоклассической моделью оптимального экономического роста. Для того чтобы установить перечисленные элементы модели, оперируют «экономическими нормами», приходящимися на одного рабочего (на одну единицу трудовых ресурсов). С целью перехода к новой терминологии, сопряженной с нормами на одного рабочего, допустим коэффициент однородности λ производственной функции F равным $1/L^t$, т.е. $\lambda=\lambda^t=1/L^t$. Данное число возможно определить как «долю одного рабочего от целого» в момент t. Тогда из (1) имеем: $F(\lambda^t K^t, \lambda^t L^t) = \lambda^t F(K^t, L^t) = \lambda^t Y^t$ или

$$\frac{Y^t}{L^t} = \mathrm{F}\left(\frac{K^t}{L^t}, 1\right).$$

Отношение K^t/L^t называется, фондовооруженностью или капиталовооруженностью и демонстрирует долю капитала, приходящуюся на одного рабочего. Заметим, объем валового выпуска и фондовооруженность, приходящиеся на одного рабочего, соответственно через y и k :

$$y^t = \frac{Y^t}{L^t}, \;\; k^t = \frac{K^t}{L^t}$$

и введем новую производственную функцию ʄ :

$$ʄ\left(\frac{K^t}{L^t}\right) = F\left(\frac{K^t}{L^t}, 1\right)$$

Тогда (1) имеет вид: $y^t = ʄ(k^t)$.

Введем величину потребления и инвестиций, приходящиеся на одного рабочего[2]:

$$c^t = \frac{C^t}{L^t} \quad t^t = \frac{I^t}{L^t}$$

Баланс (2) примет вид:

$$y^t = c^t + t^t \qquad (4)$$

Полагая $\Delta k^t = k^{t-1} - k^t = \Delta(K^t/L^t$, равенство (3) для валовых инвестиций представляется как:

$$t^t = \Delta k^t + \mu^t k^t \qquad (5)$$

Баланс (4) приобретает вид:

$$y^t = c^t + \mu^t k^t + \Delta k^t , \qquad (6)$$

что указывает, на то что выпуск продукции, приходящийся на одного рабочего, распределяется на три составные части: потребление на данного рабочего, поддержание (амортизацию) его капиталовооруженности на прежнем уровне и чистый прирост капиталовооруженности рабочего. Уравнение (6) называется основным, то есть разностным уравнением модели экономического роста. Оно имеет так же вид:

$$y^t - \mu^t k^t = c^t + \Delta k^t \qquad (7).$$

Геометрическая интерпретация основного уравнения представлена на рисунке 2 [5].

График функции $c^t+\Delta k^t$ получен как разность графиков функций y^t и $\mu^t k^t$. В точке $\overline{k^t}$ достигается максимальное значение этой функции. Рассмотрим три случая:

- нулевой уровень потребления на одного рабочего ($c^t=0$);
- максимальный объем потребления на одного рабочего ($c^t=\overline{c^t}$);
- потребление рабочего на фиксированном уровне $c^t(0<c^t<\overline{c^t})$.

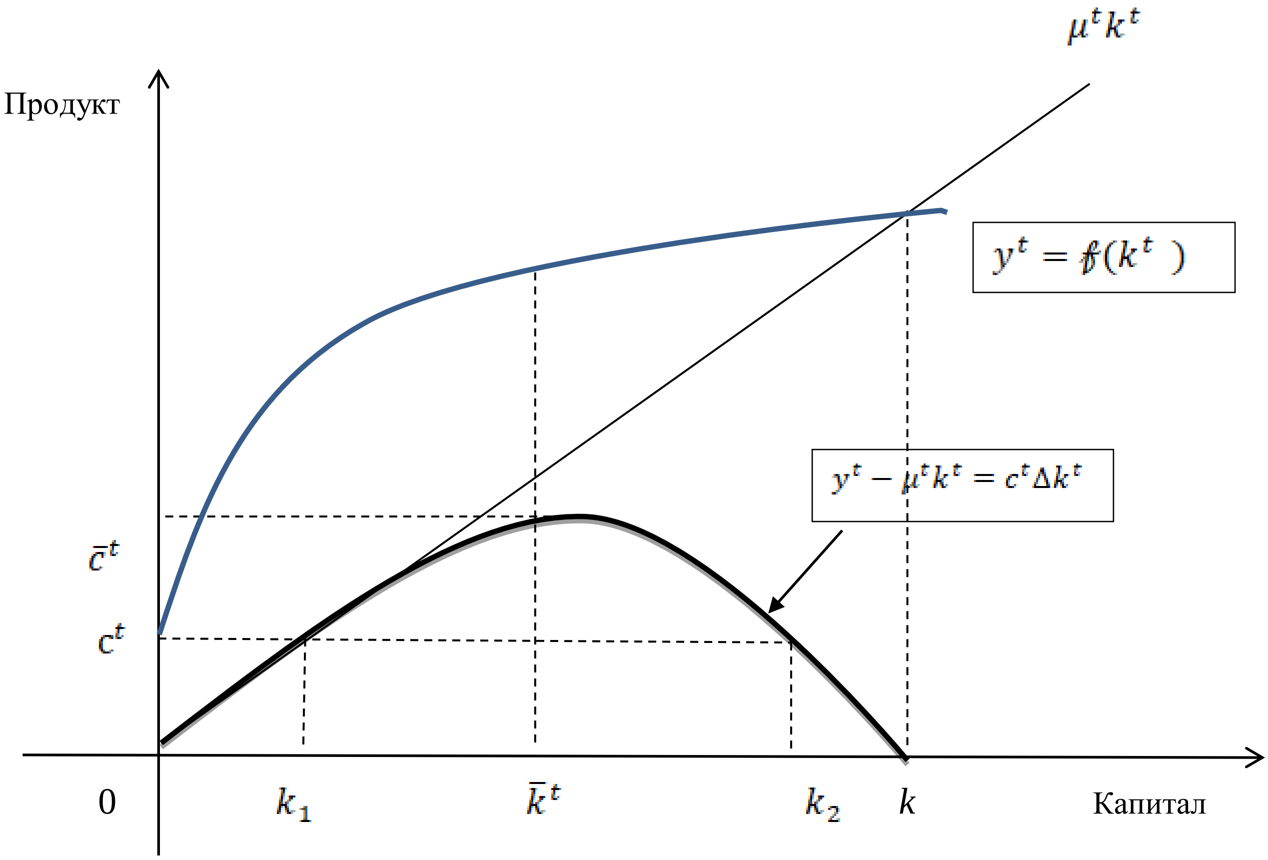

Рис. 2. Геометрическая иллюстрация основного уравнения экономического роста.

Первый случай не имеет экономически осмысленной интерпретации и приводится для полноты математических рассуждений, как один из крайних случаев распределения национального дохода, предполагающий направление всего дохода на инвестиции. Во втором случае максимальный уровень потребления $\overline{c^t}$ соответствует точке $\overline{k^t}$ максимума функции: ($c^t+\Delta k^t$). Максимальный уровень капиталовооруженности $\overline{k^t}$ находится как решение уравнения $\frac{dy^t}{dk^t}\Big|=0$ и называется уровнем золотого правила накопления. При этом максимальный уровень потребления $\overline{c^t}$ выражается равенством:

$$\overline{c^t} = f\left(\overline{k^t}\right) - \lambda \overline{k^t}$$

(когда $\Delta k^t=0$) и называется уровнем золотого правила потребления. В промежуточном случае, линия потребления на одного рабочего c^t пересекает кривую (7) в двух точках, соответствующих фондовооруженностям k_1 и k_2 . Можно сказать, что это есть два состояния «равновесия», из которых наиболее преимущественным является k_2 , а именно потому что, оно соответствует более высокому уровню фондовооруженности, что в свою очередь способствует большему выпуску продукции на одного рабочего (6).

В моделях роста под состоянием экономики (фазовой координатой системы) принято понимать фондовооруженность на одного рабочего k^t . Поэтому уравнение движения должно быть построено относительно этого параметра. Закон изменения фондовооруженности во времени получим из основного уравнения экономического роста (6) в виде:

$$k^{t+1}=f(k^t)+(1-\mu^t)\, k^t \ , t=0,1, \dots , T-1 . \tag{8}$$

Предположим, что в начальный момент $t_0=0$ эта величина задана и равна k^0:

$$k^t{}_0=k^0 \tag{9}$$

Необходимо определить класс допустимых управлений для системы (8)-(9). Допустимым управлением будем называть любую последовательность $\{c^t\}^T{}_{t=0}$, которая в каждый момент *t* удовлетворяет условию:

$$0\leq c^t\leq f(k^t) \ , t=0,1, \dots , T-1, \tag{10}$$

где c^t – потребление на одного рабочего, управляющий параметр.

Для окончательного построения оптимизационной модели построим, соответствующий содержанию рассматриваемой задачи функционал качества, оценивающий уровень достижения той или иной экономической цели. С учетом агрегированности модели такая цель должна быть направленной на повышение благосостояния общества. Поскольку попытка определения совокупной функции полезности для общества в целом связанный с рядом проблем. В качестве целевого функционала в макромодели оценивают функцию полезности - *u*, оценивающую уровень потребления одного (обобщенного) рабочего.

Целевой функционал задается на множестве допустимых траекторий системы (8)-(10).

Необходимо формализовать подбор оптимального управления системой (8)-(9) соответствующим способом. Планирующий орган подбирает некоторое допустимое управление c $\notin$ C. Подставляя это управление и начальное состояние (9) в правую часть уравнения движения (8), находим соответствующую траекторию $k(k^0,c)=\{k^t\}^T_{t=0}$. Разному управлению соответствует своя траектория. Таким образом, множеству возможных управлений соответствует множество всех траекторий системы (8)-(9) [5]:

$$K(k^0)=\{k(k^0,c)|c \notin C\}$$

Оптимальной траекторией системы (8)-(10) является такая траектория, вдоль которой функционал качества (функция полезности) принимает максимальное значение.

Задание функции полезности вдоль возможной траектории означает, что $u:K(k^0)\to R$, так что $u=u(k)$, где $k=\{k^t\}_{t=0}^T$. Требуется с помощью функции u оценить потребление. Во-первых, определить ее на множестве C возможных управлений:

$$u:C\to R \quad \text{т.е. } u=u(c) \quad ,$$

где $c=\{c^t\}_{t=0}^T$. Во-вторых, и это самое главное, полезность $u=u(c)$ не учитывает несовпадение оценок полезностей от потребления товаров в различные моменты времени. Поскольку план развития экономики составляется в начальный момент времени t=0 и на весь период $[0,T]$. В таком случае нет возможности дать оценку полезности потребления на уровне c^t в момент t>0. Необходимо прожить до момента t (данное можно только в момент t) . Однако, мы можем «трансформировать» данную полезность к начальному моменту t=0. С учетом того, что потребление c^t имеет стоимостное измерение, по модели сложного процента имеем $c^t=(1+\rho)^t c^0$ т.е. через t периодов вложение c^0 дает c^t . Получаем оценку потребления с точки зрения будущего, которая называется наращением уровня потребления. Из этой формулы получаем $c^0=(1/(1+\rho))^t c^t$, данная оценка потребления в момент t с точки зрения настоящего, является дисконтированием уровня потребления с коэффициентом $1/(1+\rho)$.

Согласно схеме дисконтирования, функцию полезности потребления можно установить в качестве целевого функционала, оценивающего уровень потребления на интервале $[0,T]$. Суммарная дисконтированная полезность имеет вид:

$$U(k^0,c)=\sum_{t=0}^T \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t u(c^t) \quad . \tag{11}$$

Таким образом, модель агрегированной задачи оптимального экономического роста в целом имеет вид:

$$\begin{cases} k^{t+1} = f(k^t + (1-\mu^t)k,\ t = 0,1,\ldots,T-1 \text{ (уравнение движения)} \\ k^t = k^0 \text{ (начальное условие)} \\ k^t \in M \text{ (конечное условие)} \\ 0 \le c^t \le f(k^t), t = 0,1,\ldots,T-1 \text{(ограничение на управление)} \\ U(k^0, c) = \sum_{t=0}^{r} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^r u(c^t) \to max \text{ (целевой функционал)} \end{cases} \qquad (12)$$

Данную модель называют «задачей оптимального ведения хозяйства». Допустимое управление $\bar{c} = \{\overline{c^t}\}_{t=0}^{T}$, соответствующее максимальному значению функционала (11), является оптимальным управлением. Оно определяет оптимальный уровень потребления $\overline{c^t}$ на одного рабочего в каждый год t=1,…,T.

Поэтому для каждого фиксированного значения $\overline{L^t}$ трудовых ресурсов можно найти оптимальные пропорции $(\overline{C^t}\ \overline{I^t})$потребления и инвестиций, где

$$\overline{C^t} = \overline{c^t}\,\overline{L^t}, \overline{I^t} = F(\overline{K^t}, \overline{L^t}) - \overline{C^t}, \overline{K^t} = \overline{k^t}\ \overline{L^t}$$

а $\overline{k^t}$- точка оптимальной траектории $\{\overline{k^t}\}_{t=0}^{T}$задачи (12).

Таким образом, экономическая траектория - это кривая изменения (фазового) состояния экономики во времени под воздействием всевозможных неуправляемых и управляемых факторов.

Установлено значительное количество желательных условий, которые можно предъявить к экономической траектории. Это и конкурентная равновесность, и соответствие максимальному сбалансированному темпу роста, и оптимальность в значении максимизации или же минимизации целевой функции. Данная тема, важна для изучения моделей роста и концепцией стабильного развития человеческого общества.

Список литературы

1. Анчишкин А.И. Прогнозирование темпов и факторов экономического роста. М.: МАКС Пресс, 2003. – 230 с.

2. Борисов Е.Ф. Экономическая теория: Учеб. пособие- 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 1999. - 384 с.

3. Пантелеева О.Б. Прогнозирование экономических процессов //В сборнике: Семнадцатые Кайгородовские чтения. Культура, наука, образование в информационном пространстве региона Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Главный редактор С.С. Зенгин. - 2017. - С. 195-197.

4. Пантелеева О.Б., Пантелеева М.А. Анализ состояния российской экономики на основе экономических показателей СНС// Сфера услуг: инновации и качество. 2016. №21, с.7.

5. Шимко, П.Д. Оптимальное управление экономическими системами. - М.: Инфра-М, 2014.- 320 с.